数理解析研究所講究録 1274 巻 2002 年 123-129

保型L-関数の臨界値と中心極限定理

京大・数理研　　名越弘文 (Hirofumi Nagoshi)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto Univ.

1. 解析数論における中心極限定理

本稿では、L 関数の臨界線上の値分布についての確率論的な現象の一端について述べる。

本稿のキーワードとして、「中心極限定理」があるが、まずは確率論における中心極限定理を思い出そう。ラフに言えば、「独立同分布(平均を 0、分散を 1 と正規化しておく)な確率変数達 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ があるとき、$n^{-1/2}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ はガウス分布に分布収束する」というもので、すなわち、ランダムな現象が集積してくると適当なスケーリングで観測量はその期待値の回りに常にガウス分布で分布してくるというものである。

次にこの節で、解析数論における中心極限定理を 2 例述べたい。ここでの中心極限定理というのは、上記の確率論の中心極限定理を動機として、数論的な対象に対し(数論的な何らかの和を考えたとき)ガウス分布が出てくるような結果を指すぐらいの意味である。そして、そのような結果は、考えている対象が統計的独立な確率変数のように振舞っている(“ランダム”である)ことを暗に意味する。

1つ目の例は、自然数 $\mathbb{N}$ 上定義されるある種の数論的関数に関する結果である。簡単のために例で説明しよう。いつものように $\omega(n)$ で、n を割る異なる素数たち p の個数を表すことにする。関数 $\omega(n)$ は、自然数 n を 1 から順に走らせたとき、突然大きくなったり逆に突然小さくなったりと “不規則” に振舞っているように思える。この $\omega(n)$ に関し、Erdös と Kac ([EK1] [EK2]) は次の結果を得た。

Theorem 1.1. 任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $(x_1 < x_2)$ に対して、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \le n \le N \,\middle|\, x_1 < \frac{\omega(n) - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}} < x_2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

この研究結果の基本的な動機は、素数たちのランダム性を調べるというものであると思われる。この結果を見ても、自然数の中で素数たちは絶妙なバランスで存在していると想像される。

次に、2番目の例であるが、それはL関数の臨界線上の値分布に関するものである。これが、今回の話のテーマである。リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ の臨界線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上の様子について Selberg は [S3] において次の結果を述べた。証明の本質的な部分は [S1] においてなされている。

Theorem 1.2. $\mathbb{C}$ 上の任意のボレル集合 E に対して、

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}m\left(\left\{t\in[0,T]\;\middle|\;\frac{\log\zeta(\frac{1}{2}+it)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log t}}\in E\right\}\right)=\frac{1}{2\pi}\iint_E e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

が成り立つ。ここで、m は、$\mathbb{R}$ 上の通常のルベーグ測度を表す。

またいわゆる Selberg class と呼ばれるディリクレ級数たちについて同様の結果が [S3] [BH] にある。また、[BH] にはこの結果を応用して零点に関する結果を得ている。

2. ランダム行列理論から

L 関数の臨界領域での様子は大きな興味の対象であるが、解析的に扱いが難しい。ところで、その良いモデルとして、ランダム行列理論というものが近年活発に研究されているので、それについて、少し触れたい。

ランダム行列とは、ある行列の集合に適当な確率測度を乗っけたものである。もともとは Wigner（量子力学の建設の立役者の1人）により、原子核のスペクトルの統計的な性質を記述するために考え出された。ランダム行列理論における代表的なモデルとして GUE(Gaussian Unitary Ensemble) というものがあるが、それは次のようなものである：$\mathcal{H}_N$ を $N\times N$-Hermite 行列全体とし、その上に Gauss 型の確率測度を乗っけたもの、つまり、$P_N(dX)\propto\exp(-\mathrm{Tr}\,(X^2))dX$ なる確率測度を与えたときの組 $(\mathcal{H}_N, P_N)$ のことを GUE と言う。興味深いのは、適当なスケーリングで $N\to\infty$ としたときの様子であり、歴史的には、これらの行列の固有値（の様々な側面）についての統計的な振る舞いがよく調べられ、現在も研究されている。

そして実は、これら固有値の統計的な様子が、一見全然関係ないと思われるリーマン・ゼータ関数やその他の L 関数の零点の様子と不思議と一致しているのである。これはヒルベルト・ポリヤのプログラムに大きな可能性を与えている、と言えよう。歴史をたどってみる。Montgomery（1973）が純粋に解析数

論的な興味から、リーマン予想の仮定の元でリーマン・ゼータ関数の零点たち ρ_i の虚部 γ_i の 2 点相関関数について調べ、その後、Dyson の指摘により GUE との関連が認識された。そしてその信憑性が、Odlyzko (1987) による隣接零点の間隔分布に対する数値計算によって、確実なものとなったのである。今では、n 点相関関数について、両者が一致することが "部分的に" 示されているが、一般には未解決である。これらのことや以下に述べることは、例えば [KS] [C] が良い survey となっている。

行列の特性多項式は固有値を零点に持つ関数であるので、上記のことから、GUE に対する特性多項式の様子とリーマン・ゼータ関数の臨界線上の様子は、何か関係がある・似ているかもしれないと思われるが、実際、そのような結果がありそれについて簡単に述べたい。

ここで、GUE よりも、GUE とは統計的に同じであるが、我々にとって扱いやすい Dyson の CUE(Circular Unitary Ensemble) というものを導入しておく。これは、$N\times N$-ユニタリー行列 $U(N)$ とその確率 Haar 測度 Q_N の組 $(U(N),Q_N)$ のことである。上記のように、適当な scaled limit $N\to\infty$ が興味深い。そのとき、例えば、$\zeta(s)$ の $\mathrm{Re}\,(s)=1/2$ 上の平均値 $M_k(T)=\int_0^T|\zeta(1/2+it)|^{2k}dt$ についてその漸近的な振る舞いが、CUE の特性多項式 $Z(U,\theta)=\det(I-Ue^{-i\theta}), U\in U(N)$ の平均値 $\lim_{N\to\infty}N^{-k^2}Q_N(|Z(U,\theta)|^{2k})$ の振る舞いと関連があることが $k=1,2$ のとき知られ、一般の k で予想されている。つまり、よく分からない $M_k(T)$ に対する良いモデルとなっているのである。

また他にも、Keating-Snaith(2000) が、次を示した。

Theorem 2.1. $\mathbb{C}$ 上の任意のボレル集合 E に対して、

$$\lim_{N\to\infty}Q_N\left(U\in U(N)\,\middle|\,\frac{\log Z(U,\theta)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log N}}\in E\right)=\frac{1}{2\pi}\iint_E e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

が (θ によらずに) 成立する。

これは、先の Selberg の結果 Theorem 1.2 に対応するものである。このように、リーマン・ゼータ関数の解析的・確率的挙動にとってランダム行列理論は良いモデルの一つになっていると思われる。

3. 主結果

この節では、著者による本稿の主結果を述べる。一言で言えば、Selberg の Theorem 1.2 を動機として、$GL(2)/\mathbb{Q}$ の保型 L 関数たちに対しレベル N を動かした時の値分布の中心極限定理について考察したものである。

今、$\mathcal{F}_N$ を $\Gamma_0(N)(\subset SL(2,\mathbb{Z}))$ に対する重さ 2 の正規化された Hecke eigen cusp forms 全体とする。ただし以下では、レベル N は素数とする。そして、$f\in\mathcal{F}_N$ に対し正規化した Hecke 固有値を $\lambda_f(n)$ とする、すなわち、$T_n(N)$ を n 番目の Hecke 作用素とするとき、

$$T_n'(N)f=\lambda_f(n)f,\quad \text{where } T_n'(N):=T_n(N)/n^{\frac{1}{2}}$$

とする。そのとき、f に付随する保型 L 関数は

$$L(s,f):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_f(n)}{n^s}=\prod_{p|N}\left(1-\frac{\lambda_f(p)}{p^s}\right)^{-1}\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{\lambda_f(p)}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}$$

for $\mathrm{Re}\,(s)>1$ というものであった。これらは $\mathbb{C}$ 上全体に解析接続されそして関数等式を持つ。Hecke 固有値は正規化してあるので、臨界線は $\mathrm{Re}\,(s)=1/2$ である。

そのとき、レベル N をパラメータをして動かしたときに次の結果が成り立つ。

Theorem 3.1. 実数 $t\neq 0$ を固定する。そのとき、$\mathbb{R}$ 上の任意にボレル集合 E に対して次が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\#\mathcal{F}_N}\#\left\{f\in\mathcal{F}_N\;\middle|\;\frac{\mathrm{Im}\,\log L\left(\frac{1}{2}+it,f\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log N}}\in E\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_E e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

レベル N を無限に飛ばしたとき Hecke eigen cusp forms $f\in\mathcal{F}_N$ の個数はどんどん増えていくが、この定理は、$N\to\infty$ で、これら f 達がお互いに "ランダム" に位置していることを暗に意味しているように思える。その "ランダム" ということをどのように表現すれば・計ればいいのかは今のところ分からない。

4. 主結果の証明

この節では、主結果の証明の概略を述べる。詳しくは [N1] を見て下さい。要するに、モーメントを計算しそれがガウス分布のものと一致することを確かめれば、Moment method により主結果が成立するので、次のモーメントに関する結果を示せばよい。

Theorem 4.1. $m\in\mathbb{N}$ とし $t\neq 0$ を固定したとき、

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_N}\left(\mathrm{Im}\,\log L\left(\frac{1}{2}+it,f\right)\right)^m$$

$$= C_m \,\#\mathcal{F}_N \left(\frac{1}{2}\log\log N\right)^{\frac{m}{2}} + O_{m,t}\left(N(\log\log N)^{\frac{m-1}{2}}\right).$$

ここで、

$$C_m = \begin{cases} \frac{m!}{(\frac{m}{2})!\, 2^{\frac{m}{2}}}, & \textit{if } m \textit{ is even}, \\ 0, & \textit{if } m \textit{ is odd} \end{cases}$$

とする。この C_m は、ガウス分布のモーメントである。

このTheoremを示すわけだが、Selberg [S1] の巧妙なテクニックに習って、計算する。我々の道具は、ある explicit formula、ある零点密度定理、跡公式の3つである。

まず、次の形の explicit formula が出発点である。

Lemma 4.2. $\mathrm{Re}\, s \geq 1/2$、$x \geq 10$ とするとき、

$$\frac{L'}{L}(s,f) = -\sum_{n\leq x^3}\frac{\Lambda_x(n)c_f(n)}{n^s} + \frac{1}{\log^2 x}\sum_{\rho}\frac{x^{\rho-s}(1-x^{\rho-s})^2}{(s-\rho)^3} - \frac{1}{\log^2 x}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{2}-\ell-s}(1-x^{-\frac{1}{2}-\ell-s})^2}{(s+\frac{1}{2}+\ell)^3}. \tag{4.1}$$

ここで、ρ は $L(s,f)$ の非自明な零点全体を走り、$\Lambda_x(n)$ は *von Mangolt* 関数 $\Lambda(n)$ を変形したもので、$\Lambda_x(n) := \Lambda(n)w_x(n)$ *where*

$$w_x(n) := \begin{cases} 1, & \textit{for } 1 \leq n \leq x, \\ \left(\frac{1}{2}\log^2\frac{x^3}{n} - \log^2\frac{x^2}{n}\right)\Big/\log^2 x, & \textit{for } x < n \leq x^2, \\ \left(\frac{1}{2}\log^2\frac{x^3}{n}\right)\Big/\log^2 x, & \textit{for } x^2 < n \leq x^3, \\ 0, & \textit{for } x^3 < n. \end{cases}$$

というものである。

次に、式(4.1)において、和 $\sum_\rho$ の部分が問題であるが（和 $\sum_\ell$ の部分は問題ない）、次の零点密度定理 (by Kowalski-Michel [KM]) により処理する。$N_f(\alpha, t_1, t_2)$ で、$L(s,f)$ の零点 $\rho = \beta + i\gamma$ のうち

$$\beta \leq \alpha, \quad t_1 \leq \gamma \leq t_2.$$

なるものの個数（重複を含める）を表すとする。

Lemma 4.3. Nを素数とする。そのとき、次を満たす絶対定数$A>0$がある：任意の実数t_1, t_2 *with*

$$t_1 < t_2, \quad t_2 - t_1 \geq \frac{1}{\log q},$$

と任意の$\alpha \geq 1/2 + (\log N)^{-1}$と任意の$c$ *with* $0 < c < 1/4$に対して、

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_N} N_f(\alpha, t_1, t_2) \ll_c (1 + |t_1| + |t_2|)^A N^{1-c\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} (\log N)(t_2 - t_1)$$

が成り立つ。

式(4.1)の右辺の第一和については、セルバーグ跡公式から導かれる次の結果（例えば、[Se]）を使って処理する。

Lemma 4.4. Nを素数とし$(n, N) = 1$とするとき、

$$\mathrm{Tr}\, T_n'(N) = \frac{(N+1)}{12} n^{-1/2} \delta_{n=\square} + O\left(n^c N^{1/2}\right).$$

ここで、$c > 0$は絶対定数で、関数$\delta_{n=\square}$は、nが平方数なら1、それ以外のnなら0なるものである。

結局は、主要な部分として、$\mathrm{Im} \sum_{p \leq N^\delta} \frac{\lambda_f(p)}{p^{1/2+it}}$（ここで、$\delta$は十分小さな正の実数）が出てきて、これのモーメントを計算することになる。Theorem 3.1, Theorem 4.1において、$\log\log N$が出るのは公式$\sum_{p \leq x} 1/p = \log\log x + O(1)$によること、また、$t \neq 0$としたのは$\sum_{p \leq x} 1/p^{1+it} \ll_t 1$ for $t \neq 0$をある個所で使うためであることを述べておく。

References

[BH] E. Bombieri, D. A. Hejhal: On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products, Duke Math. J. **80** (1995), 821–862.

[C] J. B. Conrey: *L*-functions and random matrices, in "Mathematics unlimited - 2001 and beyond" Springer-Verlag, 2001, 331–352.

[E] P. D. T. A. Elliott: Probabilistic number theory, I, II, Springer-Verlag, 1979, 1980.

[EK1] P. Erdös, M. Kac: On the Gaussia law of errors in the theory of additive functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **25** (1939), 206–207.

[EK2] P. Erdös, M. Kac: The Gaussia law of errors in the theory of additive number-theoretic functions, Amer. J. Math. **62** (1940), 738–742.

[K] M. Kac: Statistical independence in probability, analysis and number theory, Carus Monograph No. 12, 1959.

[KS] N. M. Katz, P. Sarnak: Zeros of zeta functions and symmetry, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 1–26.

[KM] E. Kowalski, P. Michel: The analytic rank of $J_0(q)$ and zeros of automorphic L-functions, Duke Math. J. **100** (1999), 503–547.

[Ku] J. Kubilius: Probabilistic methods in the theory of numbers, AMS, 1964.

[La] A. Laurinčikas: Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, 1996.

[M] M. L. Mehta: Random matrices, Academic Press, 1991.

[N1] H. Nagoshi: Gaussian distribution and a family of automorphic L-functions, preprint.

[S1] A. Selberg: Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, Arch. Math. Naturvid. **48** (1946), 89–155; Collected Papers, Vol 1, 214–280, Springer-Verlag.

[S2] A. Selberg: Contributions to the theory of Dirichlet's L-function, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo (1946), 1–62: Collected Papers, Vol 1, 281–340, Springer-Verlag.

[S3] A. Selberg: Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series, Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (1992), 367–385; Collected Papers, Vol 2, 47–63, Springer-Verlag.

[Se] J. P. Serre: Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 75–102.